Nivel educativo	CUARTO MEDIO
Asignatura	MATEMÁTICA
N° de Ficha	2
Objetivo de Aprendizaje	Operaciones y orden en el conjunto de los números enteros y racionales. Problemas que involucren el conjunto de los números enteros y racionales en diversos contextos

"Aplicando los enteros y las fracciones"

Para empezar, te invitamos a ver el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=NZIgf2oJ8DE

Recordar…

Conjuntos numéricos:

- *Números naturales:* Se denota por $\mathbb{N}$ y se conoce como el conjunto que contiene los números que nos permite contar. Los elementos de este conjunto son:

  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$

- ***Números enteros***: Se simboliza por $\mathbb{Z}$, surge de la necesidad de dar solución al caso del antecesor del número 1 y a la sustracción de número naturales.

  $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

- *Números racionales:* Se simboliza con $\mathbb{Q}$ y corresponden al conjunto de todos los números que pueden expresarse como una división de dos número enteros y con la excepción de que el divisor sea distinto de cero. El dividendo recibe el nombre de *numerador* y el divisor recibe el nombre de *denominador:*

  $$\frac{a}{b} = \frac{Numerador}{Denominador}, \quad b \neq 0$$

  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- *Números reales:* Se anota como $\mathbb{R}$ y se define como la unión del conjunto de los número racionales y el conjunto de números irracionales. Es decir:
  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
  Donde los números irracionales son todos aquellos que no pueden escribirse como racional.

Operatoria con los números racionales:

- *Opuesto Aditivo:*
  - Si tienes el número $\frac{a}{b}$, entonces su opuesto aditivo es $\frac{-a}{b}$ porque $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$

- *Inverso Multiplicativo:*
  - Si tienes el número $\frac{a}{b}$, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

- *Adición y sustracción:*
  - $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

Ejemplo:

Obtenga la suma de las fracciones:

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{10} + \frac{11}{12}$$

Solución:
En este caso, claramente los denominadores son distintos, por lo que es necesario encontrar MCM, para ello se puede usar como herramienta la tabla de MCM

4	10	12	2
2	5	6	**2**
1	5	3	**3**
1	5	1	**5**
1	1	1	
		MCM	$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}$

Primera Forma:

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{15}{15} - \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{6} + \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{5}$$

$$\frac{105}{60} - \frac{18}{60} + \frac{55}{60}$$

$$\frac{105-18+55}{60} = \frac{142}{60}$$

Simplificando la fracción por 2 se tiene

$$\frac{142}{60} = \frac{142:2}{60:2} = \frac{71}{30}$$

Segunda Forma:

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{10} + \frac{11}{12} = \frac{7 \cdot 15 - 3 \cdot 6 + 11 \cdot 5}{60} = \frac{105-18+55}{60} = \frac{142}{60} = \frac{71}{30}$$

- *Multiplicación en Q:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{21}{20}$$

- *División en Q:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- *Potencias:*
  - $\left(\frac{\mathrm{a}}{b}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{a}}{b} \cdot \frac{\mathrm{a}}{b} \cdot \frac{\mathrm{a}}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathrm{a}}{b}$
  - $\left(\frac{\mathrm{a}}{b}\right)^{-\mathrm{n}} = \left(\frac{\mathrm{b}}{a}\right)^{\mathrm{n}}$
  - $\left(\frac{\mathrm{a}}{b}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{a^n}{b^n}$

- *De fracción a decimal:*
  - $\frac{5}{4}$ *a decimal* $\mathbf{5 : 4 = 1,25}$

$$\begin{array}{l} \mathbf{5 \;:\; 4 = 1,25} \\ \mathbf{1\,0} \\ \quad \mathbf{2\,0} \\ \qquad \mathbf{0} \end{array}$$

  - $\mathbf{1\frac{3}{7}}$ *a decimal*

Se transforma a fracción $\mathbf{1\frac{3}{7} = \frac{10}{7}}$ $\mathbf{10 : 7 = 1,4285\ldots}$

$$\begin{array}{l} \mathbf{10 \;:\; 7 = 1,4285} \\ \quad \mathbf{30} \\ \qquad \mathbf{20} \\ \qquad\quad \mathbf{60} \\ \qquad\qquad \mathbf{40} \\ \qquad\qquad\quad \mathbf{5 \ldots} \end{array}$$

- *De decimal a fracción:*
  - *Finito*

$$1,27 = \frac{127}{100} \qquad 0,245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

  - **Infinito**

$$0,\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \qquad 2,\overline{16} = \frac{216-2}{99} = \frac{214}{99}$$

$$0,2\overline{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$41,17\overline{3} = \frac{41173-4117}{900} = \frac{37056}{900} = \frac{3008}{75}$$

Observación

1. Cada **número racional** tiene una familia infinita de representaciones. Por ejemplo, al *amplificar* el racional $\frac{1}{2}$ por cada número natural se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots$$

2. Cuando el valor del **numerador** supera al valor del **denominador** se admite la notación: $a\,\frac{b}{c}$, lo que recibe el nombre de *número mixto,* pues el "a" representa a la parte entera y $\frac{b}{c}$ representa a la parte fraccionaria.

A trabajar:

1. Dados los valores de $\boldsymbol{a} = \frac{-2}{3}$, $\boldsymbol{b} = \frac{3}{5}$, $\boldsymbol{c} = \frac{-1}{2}$, $\boldsymbol{d} = \frac{4}{3}$, encontrar el valor de:

   - $(a - b) \quad + \quad (c + d)$

     $$\left(\frac{-2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{-1}{2} + \frac{4}{3}\right)$$

     $$\left(\frac{-10 - 9}{15}\right) + \left(\frac{-3 + 8}{6}\right)$$

     $$\frac{-19}{15} + \frac{5}{6}$$

     $$\frac{-38 + 25}{30}$$

     $$\boxed{\frac{-13}{30}}$$

   - $\dfrac{(d - b)^{-1} \cdot (2c + a)}{a + b}$

   - $3a \cdot b + \ c \ \cdot d^{-1}$

   - $[c \cdot (a - d) \ - \ b \cdot \ (c + d)]^{-2}$

- $(a-b)^2 \quad - \quad (c+a)$

- $(a+b)^2 \ + (c-d)^2$

2. Ordene de mayor a menor los siguientes números:

$$a = \frac{3}{4} \qquad b = \frac{7}{3} \qquad c = \frac{11}{7} \qquad d = \frac{5}{2}$$

Vamos a transformar las fracciones a otras equivalentes:

$$a = \frac{63}{84} \qquad b = \frac{196}{84} \qquad c = \frac{132}{84} \qquad d = \frac{210}{84}$$

Entonces,

$$d \ > \ b \ > \ c \ > \ a$$

- *Ordenar de menor a mayor:*

$$a = \frac{7}{5} \qquad b = \frac{5}{4} \qquad c = \frac{8}{15} \qquad d = \frac{11}{12}$$

3. *Aplicando las operaciones en la resolución de situaciones:*

- Determina el número que cumple que al dividido por 2/3 se obtiene 12.

- Determina el número que al ser divido por 5/p resulta p/5.

- Determine el valor de $\frac{2{,}6 \; - \; 2 \cdot 3{,}8}{2{,}6 \cdot 6 \; + \; 3{,}8}$

- Determina el valor de $\frac{1}{3} \; + \; \frac{2}{1 \; - \; \frac{1}{4}}$

- Se mezclan 2 litros de un licor P con 3 litros de un licor Q. Si 6 litros del licor P valen \$ a y 9 litros del licor Q valen \$ b, determine el precio de los 5 litros de mezcla.

- Una persona tiene un bidón de 5 litros de capacidad, llenado hasta los $2\frac{1}{3}$ litros. Determine el número de litros le faltan para llenarlo.

- Cuál(es) de las siguientes operaciones da(n) como resultado el número 2
  - $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{6}$
  - $\frac{22}{5} : \frac{5}{11}$
  - $\frac{10}{4} - \frac{2}{4}$

- Las ¾ partes de la longitud de una carretera están pavimentadas. Si aún faltan por pavimentar (p −10) km para tener la carretera completamente pavimentada, ¿cuál es la longitud total de la carretera, en función de p?

- Se conocen $p = \left(\frac{a}{b} + d\right)$ y $q = \left(\frac{a}{c} + d\right)$, entonces demuestre si se cumples las siguientes afirmaciones:

  - $p - q \neq 0$
  - $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$
  - $p \cdot q = \frac{a^2}{bc} + d^2$

Completa tu ticket de salida

1. El valor de la operación $0,\overline{45} - 0.\overline{44}$ es:

   a) 0,1
   b) $0,\overline{1}$
   c) $0,0\overline{1}$
   d) $0,\overline{01}$

2. Si los números racionales tres quintos y siete novenos se ordenan de menor a mayor, ¿cuál de los siguientes racionales puede intercalarse entre ellos?

   a) 25/45
   b) 3/2
   c) 2/3
   d) 5/4

3. Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$ entonces el valor de $\frac{1}{a+b}$ es:

   a) 1/2
   b) 5
   c) 5/6
   d) 6/5

4. El valor de $0{,}3 : 0{,}15 - (3 - 1{,}5 : 0{,}3)$ es:

   a) -6
   b) -4
   c) 0
   d) 4

5. El orden de los números $a = \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{5}{6}$ $\quad c = \frac{3}{8}$ de menor a mayor es:

   a) $a < b < c$
   b) $b < c < a$
   c) $b < a < c$
   d) $c < a < b$

Solucionario

1. d
2. c
3. d
4. d
5. d