Nivel educativo	TERCERO MEDIO
Asignatura	MATEMÁTICA
N° de Ficha	13
Objetivo de Aprendizaje	Resolución y problemas de ecuaciones de segundo grado en diversos contextos. Tablas y gráficos de la función cuadrática, considerando la variación de sus parámetros. Puntos especiales de la gráfica de la función cuadrática: vértice, ceros de la función e intersección con los ejes. Problemas que involucren la función cuadrática en diversos contextos.

"Función Cuadrática"

Para empezar, te invitamos a ver el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=TAdPHHbq9z4

Para recordar:

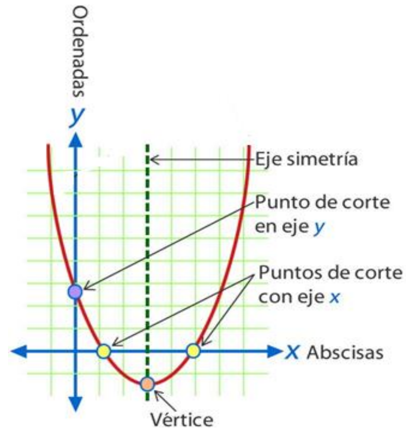
Son aquellas que se pueden reducir a la forma general:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con $\boldsymbol{a > 0}$

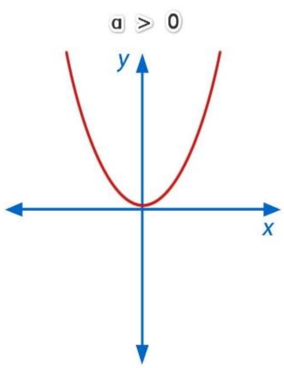
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2 \cdot a} \quad a \neq 0$

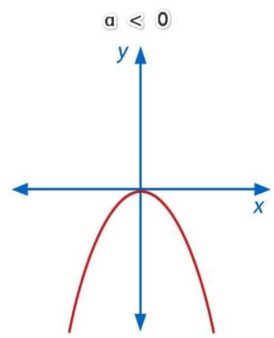
Una ***función cuadrática*** es una expresión descrita algebraicamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

La gráfica de la función cuadrática corresponde a una parábola, con un comportamiento representado por



Además, dependiendo del valor de a se tiene:





Elementos de la Parábola

1. ***La intersección con los ejes:***

   - Eje x, se debe igualar la función a cero, $f(x) = 0$

     $$ax^2 + bx + c = 0$$

     Aplicando fórmula $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

     $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

     $$I_1 = (x_1, 0) \qquad I_2 = (x_2, 0)$$

Recordar que el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ implica:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Tiene dos interceptos	*Tiene un intercepto*	*No tiene interceptos*

- Eje y, el intercepto corresponde a $I_3 = (0, c)$

2. ***Dominio y Recorrido:***

- El dominio de la función: $Dom(f) = \mathbb{R}$
- El Recorrido de la función:
  - Si $a > 0$ $Rec(f) = \left[\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$
  - Si $a < 0$ $Rec(f) = \left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right]$

3. ***Vértice:***

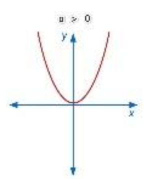
Se obtiene con $\boxed{V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)}$

4. ***Eje de Simetría:***

Se obtiene con $X = \frac{-b}{2a}$

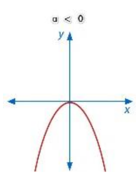
5. ***Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento:***

- Si $a > 0$ $\left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es decreciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$ es creciente

- Si $a > 0$ $\left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es creciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$ es decreciente

A trabajar…

Ejemplo 1:

Analizar la función $f(x) = x^2 + 4x + 4$

Se tiene $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$

- ***Interceptos:***

  $\boldsymbol{Eje\ x}$ $\quad f(x) = 0 \quad x^2 + 4x + 4 = 0$

  $$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

  $$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

  $$x = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

  $$x_1 = \frac{-4}{2} = -2$$

  Entonces, el único intercepto es $I_1 = (-2{,}0)$

  $\boldsymbol{Eje\ y}$ $\quad I_3 = (0, c)$ entonces $I_3 = (0{,}4)$

- ***Vértice:*** $V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$

$$V = \left(\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 4 - (4)^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16 - 16}{4}\right)$$

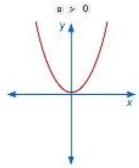
$$V = (-2\ {,}0)$$

- ***Eje de Simetría:*** $\quad X = \frac{-b}{2a}$

  $$X = \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

- ***Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento:***

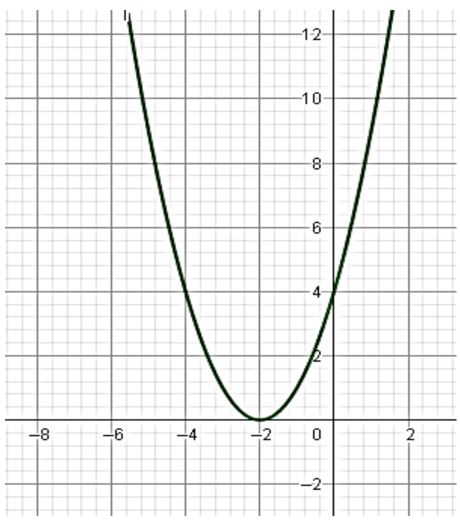
Como $a > 0$ $\quad \left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es decreciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty +\right[$ es creciente

- Decreciente $]-\infty, -2\ [$
- Creciente $]-2, \infty +[$

- ***Gráfica:***



- ***Dominio y recorrido***

  - $Dom(f) = \mathbb{R}$
  - $Rec(f) = \left[\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty +\right[= [0\ , \infty +[$

A trabajar …

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 6x$

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 36$

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Aplicación de la función cuadrática:

Ejemplo 1:

En una demostración del béisbol, una persona batea la pelota y ésta permanece en el aire durante 4.42 segundos. La función describe la altura en el tiempo, donde h es la altura en metros y t es el tiempo en segundos desde el momento en que se batea la pelota es $h(t) = -5t^2 + 22t + 0{,}5$. Determine la altura máxima que alcanza la pelota y en qué tiempo se logra.

Respuesta:

Para poder responder la pregunta debemos ver que el dato que proporciona la respuesta es el vértice.

$$V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right) \quad donde \quad a = -5 \quad b = 55 \quad c = 0{,}5$$

Reemplazando:

$$V = \left(\frac{-55}{2 \cdot -5}, \frac{4 \cdot -5 \cdot 0{,}5 \; - \; (55)^2}{4 \cdot -5}\right)$$

$$V = \left(\frac{-55}{-10}, \frac{-10 \; - 3025}{20}\right)$$

$$V = \left(5{,}5 \quad , \frac{-3035}{-20}\right)$$

$$V = (5{,}5 \quad , \quad 151{,}75)$$

Se demora 5,5 segundos y la altura máxima es de 151,75 metros.

Ejemplo 2:

Los ingresos mensuales de un fabricante de cuadernos se representan por $I(u) = 1.000u - 2u^2$, donde u es la cantidad de unidades de cuadernos que fabrica en el mes. Determine:

- Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 cuadernos.
- Qué número de cuadernos se debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso.

Respuesta:

- La fórmula de los ingresos es $I(u) = 1.000u - 2u^2$.
  Si se necesita saber si $u = 125$

  $I(125) = 1.000 \cdot 125 - 2 \cdot (125)^2$
  $I(125) = 125.000 - 2 \cdot 15.625$
  $I(125) = 125.000 - 31.250$

  $I(125) = 93.750$

- Para ver el mayor ingreso se debe determinar el vértice:
  $a = -2 \quad b = 1.000 \quad c = 0$

$$V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$$

$$V = \left(\frac{-1.000}{2 \cdot -2} \quad , \quad \frac{4 \cdot -2 \cdot 0 - (1.000)^2}{4 \cdot -2}\right)$$

$$V = \left(\frac{-1.000}{-4} \quad , \quad \frac{0 - 1.000.000}{-8}\right)$$

$$V = (250 \quad , \quad 125.000)$$

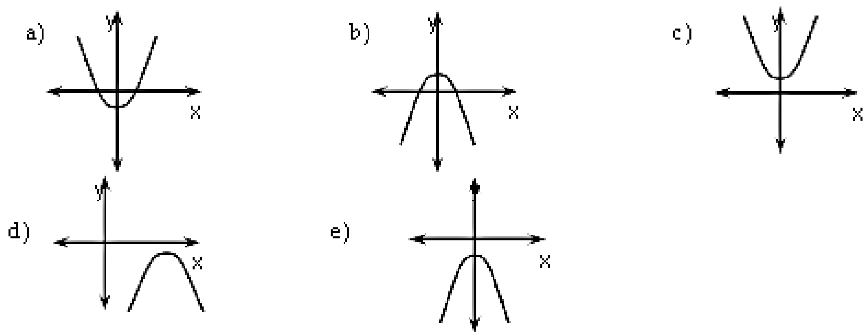
Se deben vender 250 unidades para tener el ingreso máximo de $125.000

A trabajar …

Un estadio deportivo es aparentemente plano, pero en la realidad su superficie tiene la forma de una parábola, para que el agua se escurra. La superficie puede ser modelada por $f(x) = -0.000234(x - 80)^2 + 1{,}5$ donde x es la distancia desde la izquierda del campo y la variable y es la altura del campo. Determine el ancho del campo.

Completa tu ticket de salida

1. La gráfica que representa mejor a la función $f(x) = -x^2 + 2$:



2. La función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$ corta el eje y en:

   a) $(0\,,-1)$
   b) $(-6\,,0)$
   c) $(0\,,-6)$
   d) $(0\,,1)$

3. El vértice de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 8$ es:

   a) $(2{,}4)$
   b) $(4{,}2)$
   c) $(2{,}2)$
   d) $(2{,}8)$

4. El punto que no pertenece a la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es:

   a) $(2,9)$
   b) $(-1,0)$
   c) $(0,1)$
   d) $(1,1)$

5. La ganancia de una empresa está dada por la función $G(x) = 5.000 + 1.000x - 5x^2$ donde x representa la cantidad en miles de dólares. La cantidad que debe vender para maximizar su ganancia es:

   a) 5.000
   b) 500
   c) 100
   d) 10

Solucionario

1. **b**
2. **c**
3. **d**
4. **d**
5. **c**