Nivel educativo	CUARTO MEDIO
Asignatura	MATEMÁTICA
N° de Ficha	2
Objetivo de Aprendizaje	Operaciones y orden en el conjunto de los números enteros y racionales. Problemas que involucren el conjunto de los números enteros y racionales en diversos contextos

"Aplicando los enteros y las fracciones"

Para empezar, te invitamos a ver el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=NZIgf2oJ8DE

Recordar…

Conjuntos numéricos:

- *Números naturales:* Se denota por $\mathbb{N}$ y se conoce como el conjunto que contiene los números que nos permite contar. Los elementos de este conjunto son:

  $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

- ***Números enteros***: Se simboliza por $\mathbb{Z}$, surge de la necesidad de dar solución al caso del antecesor del número 1 y a la sustracción de número naturales.

  $$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

- *Números racionales:* Se simboliza con $\mathbb{Q}$ y corresponden al conjunto de todos los números que pueden expresarse como una división de dos número enteros y con la excepción de que el divisor sea distinto de cero. El dividendo recibe el nombre de *numerador* y el divisor recibe el nombre de *denominador:*

  $$\frac{a}{b} = \frac{Numerador}{Denominador}, \quad b \neq 0$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- *Números reales:* Se anota como $\mathbb{R}$ y se define como la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de números irracionales.

  Es decir: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

  Donde los números irracionales son todos aquellos que no pueden escribirse como racional.

Operatoria con los números racionales:

- *Opuesto Aditivo:*
  - Si tienes el número $\frac{a}{b}$, entonces su opuesto aditivo es $\frac{-a}{b}$ porque $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$

- *Inverso Multiplicativo:*
  - Si tienes el número $\frac{a}{b}$, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

- *Adición y sustracción:*
  - $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

Ejemplo:

Obtenga la suma de las fracciones:

$$\frac{7}{12} - \frac{3}{10} + \frac{11}{4}$$

Solución:
En este caso, claramente los denominadores son distintos, por lo que es necesario encontrar MCM, para ello se puede usar como herramienta la tabla de MCM

4	**10**	**12**	**2**
2	5	6	**2**
1	5	3	**3**
1	5	1	**5**
1	1	1	
		MCM	$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}$

Primera Forma:

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{5}-\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{6}+\frac{11}{4}\cdot\frac{15}{15}$$

$$\frac{35}{60}-\frac{18}{60}+\frac{165}{60}$$

$$\frac{35-18+165}{60}=\frac{182}{60}$$

Simplificando la fracción por 2 se tiene

$$\frac{182}{60}=\frac{142:2}{60:2}=\frac{91}{30}$$

Segunda Forma:

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{10}+\frac{11}{4}=\frac{7\cdot5-3\cdot6+11\cdot15}{60}$$

$$=\frac{35-18+165}{60}=\frac{182}{60}=\frac{91}{30}$$

- *Multiplicación en Q:*

  $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$$

  Ejemplo:

  $$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{1\cdot2\cdot7}{3\cdot5\cdot4}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$$

- *División en Q:*

  $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc}$$

  Ejemplo:

  $$\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

- *Potencias:*
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^n}{b^n}$

- *De fracción a decimal:*
  - $\frac{5}{4}$ *a decimal* $\quad 5 : 4 = 1,25$

$$5 : 4 = 1,25$$
$$10$$
$$20$$
$$0$$

  - $1\frac{3}{7}$ *a decimal*

    Se transforma a fracción $1\frac{3}{7} = \frac{10}{7} \qquad 10 : 7 = 1,4285\ldots$

$$10 : 7 = 1,4285$$
$$30$$
$$20$$
$$60$$
$$40$$
$$5\ldots$$

- *De decimal a fracción:*

  - *Finito*

$$1,27 = \frac{127}{100} \qquad 0,245 = \frac{245}{1000} = \frac{49}{200}$$

  - **Infinito**

$$0,\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \qquad 2,\overline{16} = \frac{216-2}{99} = \frac{214}{99}$$

$$0,2\overline{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$41,17\overline{3} = \frac{41173-4117}{900} = \frac{37056}{900} = \frac{3008}{75}$$

Observación

1. Cada **número racional** tiene una familia infinita de representaciones. Por ejemplo, al *amplificar* el racional $\frac{1}{2}$ por cada número natural se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots$$

2. Cuando el valor del **numerador** supera al valor del **denominador** se admite la notación: $a\,\frac{b}{c}$, lo que recibe el nombre de *número mixto,* pues el "a" representa a la parte entera y $\frac{b}{c}$ representa a la parte fraccionaria.

A trabajar:

1. Dados los valores de $\boldsymbol{a} = \frac{-2}{5}$, $\boldsymbol{b} = \frac{3}{4}$, $\boldsymbol{c} = \frac{-1}{3}$, $\boldsymbol{d} = \frac{4}{3}$, encontrar el valor de:

   - $(a - b) \quad + \quad (c + d)$

$$\left(\frac{-2}{5} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$\left(\frac{-8 - 15}{20}\right) \quad + \quad \left(\frac{-1 + 4}{3}\right)$$

$$\frac{-23}{15} + \frac{3}{3}$$

$$\frac{-23 + 3}{15}$$

$$\boxed{\frac{-20}{15}} = \frac{-4}{3}$$

- $(d-b)\cdot(c+a)$

- $a\cdot b+\ c\ \cdot d$

- $c\cdot(a-d)\ \ -\ \ b\cdot\ (c+d)$

- $(a-b)^2\ \ -\ \ (c+a)$

- $(a+b)^2\ +(c-d)^2$

2. Ordene de mayor a menor los siguientes números:

$$a=\frac{3}{4}\qquad b=\frac{7}{3}\qquad c=\frac{11}{7}\qquad d=\frac{5}{2}$$

Vamos a transformar las fracciones a otras equivalentes:

$$a=\frac{63}{84}\qquad b=\frac{196}{84}\qquad c=\frac{132}{84}\qquad d=\frac{210}{84}$$

Entonces,

$$d\ >\ \ b\ >\ c\ \ >\ \ a$$

- *Ordenar de menor a mayor:*

$$a = \frac{7}{5} \qquad b = \frac{5}{4} \qquad c = \frac{8}{15} \qquad d = \frac{11}{12}$$

3. *Aplicando las operaciones en la resolución de situaciones:*

- Si el valor de $a = \frac{1}{3}$ y el de $b = \frac{1}{5}$. Determine el valor de la expresión:

$$\frac{a + \frac{3}{6}}{\frac{6}{15} + b}$$

- Encuentre un valor de un número que cumpla con que al ser dividido por $\frac{2}{5}$ se obtenga como resultado 15.

- Si se sabe que $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{9}$ y $c = \frac{7}{3}$, encuentre el valor de $\frac{a+b}{c}$

- Determine el valor de la expresión $\frac{1}{a} - \frac{b}{c}$, si se sabe que $a = 4$, $b = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$ y $c = \frac{7}{5}$

- Encuentre Determina el número que al ser divido por 5/p resulta p/5.

- Determine el valor de $\frac{2{,}6 \; - \; 2 \cdot 3{,}8}{2{,}6 \cdot 6 \; + \; 3{,}8}$

- Determina el valor de $\left[\frac{1}{3} \; + \; \frac{2}{1 \; - \; \frac{1}{4}}\right] \cdot \left[\frac{1}{3} \; - \; \frac{2}{1 \; + \; \frac{1}{4}}\right]$

- Una estudiante ha leído 30 páginas de una novela para la clase de lenguaje, Si comenta que aún le faltan 2/3 del libro por leer, ¿cuál es el número de páginas del libro?

- Una persona tiene un bidón de 5 litros de capacidad, llenado hasta los $2\frac{1}{3}$ litros. Determine el número de litros le faltan para llenarlo.

- Cuál(es) de las siguientes operaciones da(n) como resultado el número 2
  - $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{6}$
  - $\frac{22}{5} : \frac{5}{11}$
  - $\frac{10}{4} - \frac{2}{4}$

- Las ¾ partes de la longitud de una carretera están pavimentadas. Si aún faltan por pavimentar (p −10) km para tener la carretera completamente pavimentada, ¿cuál es la longitud total de la carretera, en función de p?

- Se conocen $p = \left(\frac{a}{b} + d\right)$ y $q = \left(\frac{a}{c} + d\right)$, entonces demuestre si se cumples las siguientes afirmaciones:
  - $p - q \neq 0$
  - $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$
  - $p \cdot q = \frac{a^2}{bc} + d^2$

Completa tu ticket de salida

1. Si el valor de $a = \frac{-1}{3}$, entonces al evaluar en la expresión $\frac{a + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}$ el resultado es:

   a) 107/12
   b) 1/9
   c) 1
   d) -1/3

2. El valor de la operación $\left(\frac{4}{0{,}4}\right) \cdot 0{,}04$ es:

   a) 0,4
   b) $0,\overline{4}$
   c) $0{,}04$
   d) $0,\overline{04}$

3. Si los números racionales tres quintos y siete novenos se ordenan de menor a mayor, ¿cuál de los siguientes racionales puede intercalarse entre ellos?

   a) 25/45
   b) 3/2
   c) 2/3
   d) 5/4

4. Si $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{3}$ entonces el valor de $\frac{a-b}{a+b}$ es:

   a) -1/7
   b) -7
   c) -1
   d) 7

5. El orden de los números $a = \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{5}{6}$ $\quad c = \frac{3}{8}$ de menor a mayor es:

   a) $a < b < c$
   b) $b < c < a$
   c) $b < a < c$
   d) $c < a < b$

Solucionario

1. c
2. a
3. d
4. d
5. d