Nivel educativo	TERCERO MEDIO
Asignatura	MATEMÁTICA
N° de Ficha	12
Objetivo de Aprendizaje	Resolución y problemas de ecuaciones de segundo grado en diversos contextos. Tablas y gráficos de la función cuadrática, considerando la variación de sus parámetros. Puntos especiales de la gráfica de la función cuadrática: vértice, ceros de la función e intersección con los ejes. Problemas que involucren la función cuadrática en diversos contextos.

"Ecuación y Función Cuadrática"

Para empezar, te invitamos a ver el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=TAdPHHbq9z4

Para recordar:

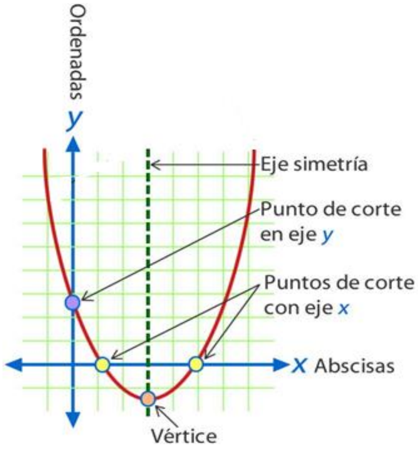
Son aquellas que se pueden reducir a la forma general:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con $\boldsymbol{a > 0}$

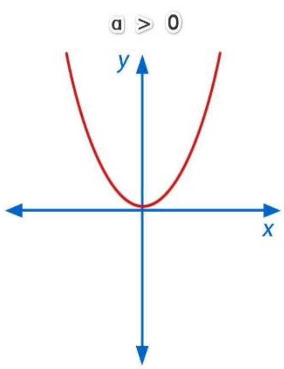
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \quad a \neq 0$

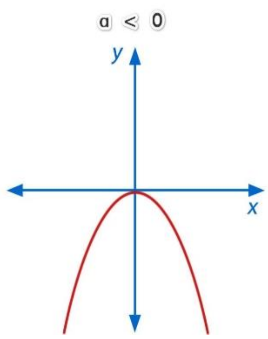
Una ***función cuadrática*** es una expresión descrita algebraicamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

La gráfica de la función cuadrática corresponde a una parábola, con un comportamiento
representado por



Además, dependiendo del valor de a se tiene:





Elementos de la Parábola

1. ***La intersección con los ejes:***

- Eje x, se debe igualar la función a cero, $f(x) = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplicando fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$I_1 = (x_1, 0) \qquad I_2 = (x_2, 0)$$

Recordar que el valor de la discriminante $\Delta = \ b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ implica:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$Tiene\ dos\ interceptos$	$Tiene\ un\ intercepto$	$No\ tiene\ interceptos$

- Eje y, el intercepto corresponde a $I_3 = (0, c)$

2. ***Dominio y Recorrido:***

- El dominio de la función: $Dom(f) = \mathbb{R}$
- El Recorrido de la función:
  - Si $a > 0$ $Rec(f) = \left[\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$
  - Si $a < 0$ $Rec(f) = \left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right]$

3. ***Vértice:***

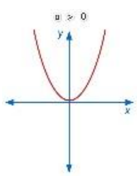
Se obtiene con $\boxed{V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)}$

4. ***Eje de Simetría:***

Se obtiene con $X = \frac{-b}{2a}$

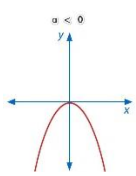
5. ***Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento:***

- Si $a > 0$ $\left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es decreciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$ es creciente

- Si $a > 0$ $\left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es creciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty + \right[$ es decreciente

A trabajar…

Ejemplo 1:

Analizar la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Se tiene $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

- ***Interceptos:***

$\boldsymbol{Eje\ x} \quad f(x) = 0 \quad x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

Entonces, el único intercepto es $I_1 = (-1{,}0)$

$\boldsymbol{Eje\ y} \quad I_3 = (0, c)$ entonces $I_3 = (0{,}2)$

- ***Vértice:*** $V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$

$$V = \left(\frac{-2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 1 - (2)^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V = \left(\frac{-2}{2}, \frac{4 - 4}{4}\right)$$

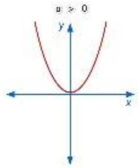
$$V = (-1\ {,}0)$$

- ***Eje de Simetría:*** $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

- ***Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento:***

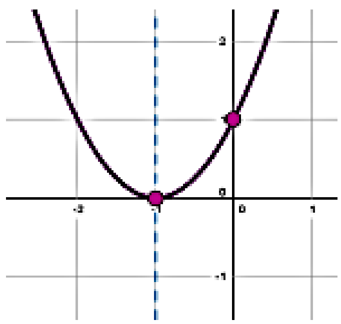
Como $a > 0$ $\left]-\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right[$ es decreciente



$\left]\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty +\right[$ es creciente

- Decreciente $]-\infty, 0\,[$
- Creciente $]0, \infty +[$

- ***Gráfica:***



- ***Dominio y recorrido***

  - $Dom(f) = \mathbb{R}$
  - $Rec(f) = \left[\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}, \infty +\right[= [0\,, \infty +[$

A trabajar …

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 4x$

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 25$

- Analizar la función $f(x) = x^2 - 3x - 18$

Aplicación de la función cuadrática:

Ejemplo 1:

Los ingresos mensuales de un fabricante de cuadernos se representan por $I(u) = 1.000u - 2u^2$, donde u es la cantidad de unidades de cuadernos que fabrica en el mes. Determine:

- Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 cuadernos.
- Qué número de cuadernos se debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso.

Respuesta:

- La fórmula de los ingresos es $I(u) = 1.000u - 2u^2$.

  Si se necesita saber si $u = 125$

  $$I(125) = 1.000 \cdot 125 - 2 \cdot (125)^2$$
  $$I(125) = 125.000 - 2 \cdot 15.625$$
  $$I(125) = 125.000 - 31.250$$
  $$I(125) = 93.750$$

- Para ver el mayor ingreso se debe determinar el vértice:

  $a = -2 \quad b = 1.000 \quad c = 0$

  $$V = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$$

  $$V = \left(\frac{-1.000}{2 \cdot -2} \quad , \quad \frac{4 \cdot -2 \cdot 0 - (1.000)^2}{4 \cdot -2}\right)$$

  $$V = \left(\frac{-1.000}{-4} \quad , \quad \frac{0 - 1.000.000}{-8}\right)$$

  $$V = (250 \quad , \quad 125.000)$$

  Se deben vender 250 unidades para tener el ingreso máximo de $125.000

A trabajar …

La función $P(t) = -0{,}008t^2 + 0{,}868t - 11{,}884$ modela el porcentaje de la población de Chile que ha obtenido su jubilación anticipada y cuya edad promedio está dada por t

a) ¿Para qué edad de la población el porcentaje es mayor?

b) ¿A cuánto asciende este porcentaje?

Completa tu ticket de salida

1. El punto que no pertenece a la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es:

   a) $(1{,}4)$
   b) $(-1{,}0)$
   c) $(0{,}1)$
   d) $(1{,}1)$

2. La función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$ corta el eje x en:

   a) 3 y 2
   b) -3 y 2
   c) 3 y -2
   d) -3 y -2

3. El vértice de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 8$ es:

    a) $(2,4)$
    b) $(4,2)$
    c) $(2,2)$
    d) $(2,8)$

4. El punto de corte con ele je y de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es:

    a) $(0,1)$
    b) $(0,4)$
    c) $(0,-4)$
    d) $(0,3)$

5. La ganancia de una empresa está dada por la función $G(x) = 5.000 + 1.000x - 5x^2$ donde x representa la cantidad en miles de dólares. La cantidad que debe vender para maximizar su ganancia es:

    a) 5.000
    b) 500
    c) 100
    d) 10

Solucionario

1. **d**
2. **c**
3. **a**
4. **d**
5. **c**